c) Graficul funcției f are o asimptotă verticală dacă există un punct a pentru care $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Funcția f este continuă pe $(0,\infty)$ deci pentru $a\in(0,\infty)$ avem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \neq \pm\infty$. Deci graficul funcției f nu poate avea o asimptotă verticală în $a\in(0,\infty)$.

Vom arăta că $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ căci funcția $f(x)=\sqrt{x}$ este continuă pe $[0,\infty)$.

$\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$

Deci $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

Deci $a=0$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției f.

Ecuația dreptei verticale care intersectează axa Ox în $a=0$ este $x=0$.

2. a) Trebuie să arătăm că $F'(x)=f(x)$. Calculăm

$F'(x)=(xe^x-e^x+2012)' = (xe^x)'-(e^x)'+2012' = x\cdot(e^x)'+x'\cdot e^x - e^x+0 = x\cdot e^x+e^x-e^x = x\cdot e^x = f(x)$.

b) Facem schimbarea de variabilă $x=e^y \Leftrightarrow y=\ln x$. Integrala devine

$$\int_1^e f(\ln x)\,dx = \int_0^1 f(y)\,d(e^y) = \int_0^1 f(y)e^y\,dy = \int_0^1 ye^{2y}dy.$$

Avem

$$\int_0^1 y\cdot e^{2y}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\cdot(e^{2y})'dy = \frac{1}{2}\left[y\cdot e^{2y}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 y'\cdot e^{2y}dy$$